

Lista de soluções 3

Exercício 1 ($\wedge$ e $\vee$)

1	$A \wedge B$	premissa
2	A	$\wedge_{e1}$ 1
3	B	$\wedge_{e2}$ 1
4	$A \rightarrow \neg B$	hipótese
5	$\neg B$	$\rightarrow_e$ 2,4
6	$\perp$	$\neg_e$ 3,5
7	$\neg(A \rightarrow \neg B)$	PBC

1	$\neg(A \rightarrow \neg B)$	premissa
2	$\neg A$	hipótese
3	A	hipótese
4	$\perp$	$\neg_e$ 3,2
5	$\neg B$	$\perp_e$ 4
6	$A \rightarrow \neg B$	$\rightarrow_i$ 3-5
7	$\perp$	$\neg_e$ 6,1
8	A	PBC 2-7
9	$\neg B$	hipótese
10	A	hipótese
11	$\neg B$	cópia 9
12	$A \rightarrow \neg B$	$\rightarrow_i$ 10-11
13	$\perp$	$\neg_e$ 12,1
14	B	PBC 9-13
15	$A \wedge B$	$\wedge_i$ 8,14

1	$A \vee B$	premissa
2	A	hipótese
3	$\neg A$	hipótese
4	$\perp$	$\neg_e$ 2,3
5	B	$\perp_e$ 4
6	$\neg A \rightarrow B$	$\rightarrow_i$ 3-5
7	B	hipótese
8	$\neg A$	hipótese
9	B	cópia 7
10	$\neg A \rightarrow B$	$\rightarrow_i$ 8-9
11	$\neg A \rightarrow B$	$\vee_e$ 1,2-6,7-10

1	$\neg A \rightarrow B$	premissa
2	$\neg(A \vee B)$	hipótese
3	$\neg A \wedge \neg B$	deMorgan
4	$\neg A$	$\wedge_{e1}$ 3
5	$\neg B$	$\wedge_{e2}$ 3
6	B	$\rightarrow_e$ 4,1
7	$\perp$	$\neg_e$ 6,5
8	$A \vee B$	PBC 2-7

Exercício 2 (O sistema $\mathcal{H}$)

1	$\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$	Regra $\neg\neg_e$, substituindo $A \mapsto \neg A$
2	$(\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow \neg\neg A)$	ax ₃
3	$A \rightarrow \neg\neg A$	$\rightarrow_e$ 1,2

1	$A \rightarrow \neg\neg A$	Regra $\neg\neg_i$.
2	$\neg\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg\neg A)$	ax ₁ , substituindo $A \mapsto \neg\neg A$, $B \mapsto \neg b$.
3	$(\neg B \rightarrow \neg\neg A) \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$	ax ₃ substituindo $A \mapsto \neg A$.
4	$A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg\neg A)$	Trans 1,2
5	$A \rightarrow (\neg A \rightarrow b)$	Trans 4,3

Exercício 3 (Tabelas de verdade)

Seja o nome das funções S_2 , P , S_{23} respectivamente (S_2 é a função simétrica de quatro variáveis, que é verdadeira, se exatamente 2 argumentos são verdadeiros; S_{23} é verdadeira se exatamente 2 ou 3 argumentos são verdadeiros).

(a)

p	$p \wedge \neg p$
f	f
v	f

(b)

p	q	$p \wedge \neg q$
f	f	f
f	v	f
v	f	v
v	v	f

(c)

p	q	$p \wedge q \rightarrow p \vee q$
f	f	v
f	v	v
v	f	v
v	v	v

(d)

p	q	$p \rightarrow (q \rightarrow p)$
f	f	v
f	v	v
v	f	v
v	v	v

(e)

p	q	$(p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
f	f	v
f	v	f
v	f	v
v	v	v

(f)

p	q	$\neg(\neg p \wedge \neg q)$
f	f	f
f	v	v
v	f	v
v	v	v

(g)

p	q	r	s	S_{23}
f	f	f	f	f
f	f	f	v	f
f	f	v	f	f
f	f	v	v	v
f	v	f	f	f
f	v	f	v	v
f	v	v	f	v
f	v	v	v	v
v	f	f	f	f
v	f	f	v	v
v	f	v	f	v
v	f	v	v	v
v	v	f	f	v
v	v	f	v	f
v	v	v	f	f
v	v	v	v	f

(h)

p	q	r	s	P
f	f	f	f	v
f	f	f	v	v
f	f	v	f	f
f	f	v	v	f
f	v	f	f	v
f	v	f	v	f
f	v	v	f	f
f	v	v	v	v
v	f	f	f	f
v	f	f	v	f
v	f	v	f	f
v	f	v	v	f
v	v	f	f	v
v	v	f	v	v
v	v	v	f	v
v	v	v	v	v

(i)

a	b	c	d	S_2
f	f	f	f	f
f	f	f	v	f
f	f	v	f	f
f	f	v	v	v
f	v	f	f	f
f	v	f	v	v
f	v	v	f	v
f	v	v	v	f
v	f	f	f	f
v	f	f	v	v
v	f	v	f	v
v	f	v	v	f
v	v	f	f	v
v	v	f	v	f
v	v	v	f	f
v	v	v	v	f

Exercício 4 (Relação de consequência semântica)

1.

p	q	$\neg(\neg p \vee q)$
f	f	f
f	v	f
v	f	v
v	v	f

2.

p	$\neg p \rightarrow p$
f	f
v	v

3.

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
f	f	v	v
f	v	v	v
v	f	f	f
v	v	v	v

4.

p	$p \oplus p$
f	f
v	f

5.

p	q	$(p \oplus q) \oplus p$
f	f	f
f	v	v
v	f	f
v	v	v

6.

p	$p \oplus 1$	$\neg p$
f	v	v
v	f	f

7.

p	q	r	$(p \oplus q) \wedge r$	$(p \wedge r) \oplus (q \wedge r)$
f	f	f	f	f
f	f	v	f	f
f	v	f	f	f
f	v	v	v	v
v	f	f	f	f
v	f	v	v	v
v	v	f	f	f
v	v	v	f	f

8.

p	q	$p \oplus q$	$\neg(p \equiv q)$
f	f	f	f
f	v	v	v
v	f	v	v
v	v	f	f

Usando as tabelas de verdade resulta que todas relações são corretos.

Exercício 5 (Retorno a Sim-Não do Sul)

p_1	p_2	o	$p_1 \leftrightarrow o \wedge p_2$	$p_2 \leftrightarrow o \wedge \neg p_1$
f	f	f	v	v
f	f	v	v	f
f	v	f	v	f
f	v	v	f	v
v	f	f	f	v
v	f	v	f	v
v	v	f	f	f
v	v	v	v	f

Assim, se todas a premissas são verdadeiras, o único caso e que p_1 , p_2 e o são falsos e a relação de consequência semântica entre as premissas e a conclusão é correto nesse caso:

$$p_1 \leftrightarrow o \wedge p_2, p_2 \leftrightarrow o \wedge \neg p_1 \models \neg o$$