# Lista de soluções 1

**Exercício 0.1**
Nos vamos provar com indução completa que $P(k)$ : "$\phi^* \equiv \neg\Phi$ para $\phi$ com árvore de parse com altura $k$" é verdadeira.
**Prova.** Base $k = 1$: $\phi$ é uma proposição $p$, e $\phi^* = \neg p \equiv \neg p = \neg\phi$. Passo $k$: Pela hipótese da indução (HI) $P(l)$ é verdadeiro para $l < k$. Nos vamos provar $P(k)$ por análise de casos. Seja $\phi = \phi_1 \wedge \phi_2$. Então pela HI, $\phi_1^* \equiv \neg\phi_1$ e $\phi_2^* \equiv \neg\phi_2$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\phi^* &= \phi_1^* \vee \phi_2^* && \text{pela aplicação de substituição recursivamente}\\
&\equiv \neg\phi_1 \vee \neg\phi_2 && \text{pela HI e definição semântica de } \wedge\\
&\equiv \neg(\phi_1 \wedge \phi_2) && \text{pela lei de De Morgan}\\
&= \neg\phi
\end{aligned}$$

Os casos $\phi = \phi_1 \vee \phi_2$ e $\phi = \neg\psi$ são semelhantes. ■

**Exercício 0.2 (Tautologias, 20%)**
Usando tabelas de verdade, podemos ver que $\not\models \phi_0$, $\not\models \phi_1$ e $\models \phi_2$. Também temos $\models \phi_n \Rightarrow \models \phi_{n+2}$ e $\models \phi_n \Rightarrow \not\models \phi_{n+1}$. Prova: Suponhe que $\models \phi_n$. Para alguma atribuição $A$, suponhe mais que $|[p]|_A = f$. Então $|[\phi_{n+1}|]_A = f$, que mostra $\not\models \phi_{n+1}$, e $|[\phi_{n+2}]|_A = v$. Se $|[p]|_A = v$, $|[\phi_{n+2}]|_A = v$ também, que mostra $\models \phi_{n+2}$.
Logo, por indução, obtemos que $\models \phi_{2n}$ para todo $n \geq 1$.

**Exercício 0.3 (Um crime, 20%)**
Um pré-requisito implícito é que exatamente uma criança roubou a bolsa. Supondo que foi Ana, a primeira afirmação dela (1) é falso, portanto as outras devem ser verdadeiras. Mas ela afirma que foi Denis (3), uma contradição. Da mesma forma, a hipótese que foi Carol, Denis ou Eraldo leva a uma contradição, porque todos eles afirmam, que foi outra pessoa que roubou (9,11,14). Portanto foi Beto, e as afirmações verdadeiras e falsas são

| | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| Ana | v | v | f |
| Beto | f | v | v |
| Carol | v | v | f |
| Denis | v | f | v |
| Eraldo | v | v | f |

**Exercício 0.4 (Fórmulas da lógica proposicional, 20%)**
(0) $q \vee r \to p$, com $p$: Matemático $M$ tem o número de Erdös 1, $q$: Matemático $M$ publicou um trabalho em co-autoria com Erdös. $r$: Matemático $M$ publicou mais que um trabalho em co-autoria com Erdös.
(1) $\neg p$, com $p$: Todos os corvos são pretos.
(2) $(p \to \neg s) \wedge (r \to \neg q)$, com $p$: Inter ganha, $q$: Os torcedores de Inter ficam felizes, $r$: Grêmio ganha, $s$: Os torcedores de Grêmio ficam felizes.
(3) $(p \vee \neg p) \wedge (\neg p \to \neg q)$ com $p$: A chave é fechada, $q$: A luz é ligada.
(4) $p \to q$, com $p$: Coisa existe, $q$: Coisa tem que ter uma causa.
(5) $(p \vee q) \wedge \neg r$, com $p$: Um corvo pode ser preto, $q$: Um corvo pode ser branco, $r$: Um corvo pode ser vermelho.
(6) $q \to \neg p$, $p$: Gosto de churrasco, $q$: Está chovendo.
(7) $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$, com $p$: Todo átomo é verdadeiro, $q$: Todo átomo é falso.

(8) $p \to q$, com $p$: A lua é feita de queijo, $q$: Eu sou louco.
(9) $p \to q \vee r$, com $p$: O lema de König é verdadeiro, $q$: Uma árvore com um número infinito de nós de grau finito tem um caminho infinito. $r$: Uma árvore com um número infinito de nós de grai finito tem mais que um caminho infinito.

**Exercício 0.5 (Relação da conseqüência lógica, 30%)**

(0) $p \to t, q \to t, r \to t, p \vee (q \vee r) \vdash t$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $p \to t$ | premissa |
| 2 | $q \to t$ | premissa |
| 3 | $r \to t$ | premissa |
| 4 | $p \vee (q \vee r)$ | premissa |
| 5 | $p$ | hipótese |
| 6 | $t$ | MP 5,1 |
| 7 | $q \vee r$ | hipótese |
| 8 | $q$ | hipótese |
| 9 | $t$ | MP 8,2 |
| 10 | $r$ | hipótese |
| 11 | $t$ | MP 10,3 |
| 12 | $t$ | $\vee_e$ 7,8–9,10-11 |
| 13 | $t$ | $\vee_e$ 4,5–6,7–12 |

(1) $\neg(r \vee r) \vdash (q \wedge r) \to (q \to p)$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\neg(r \vee r)$ | premissa |
| 2 | $r$ | hipótese |
| 3 | $r \vee r$ | $\vee_{i_1}$ 2 |
| 4 | $\perp$ | $\neg_e$ 3,1 |
| 5 | $\neg r$ | $\neg_e$ 2–4 |
| 6 | $q \wedge r$ | hipótese |
| 7 | $r$ | $\wedge_{e_2}$ 6 |
| 8 | $\perp$ | $\neg_e$ 7,5 |
| 9 | $q \to p$ | $\perp_e$ 8 |
| 10 | $(q \wedge r) \to (q \to p)$ | $\to_i$ 6–9 |

(2) $p \to q, \neg(q \wedge r) \vee p, \neg(r \wedge p) \vdash (q \to \neg r) \wedge (p \to q)$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $p \to q$ | premissa |
| 2 | $\neg(q \wedge r) \vee p$ | premissa |
| 3 | $\neg(r \wedge p)$ | premissa |
| 4 | $q$ | hipótese |
| 5 | $r$ | hipótese |
| 6 | $\neg(q \wedge r)$ | hipótese |
| 7 | $q \wedge r$ | $\wedge_i$ 4,5 |
| 8 | $\perp$ | $\neg_e$ 7,6 |
| 9 | $p$ | $\perp_e$ 8 |
| 10 | $p$ | hípotese |
| 11 | $p$ | $\vee_e$ 2,6–9,10–10 |
| 12 | $r \wedge p$ | $\wedge_i$ 5,11 |
| 13 | $\perp$ | $\neg_e$ 12,3 |
| 14 | $\neg r$ | $\neg_e$ 5–13 |
| 15 | $q \to \neg r$ | $\to_i$ 4–14 |
| 16 | $(q \to \neg r) \wedge (p \to q)$ | $\wedge_i$ 15,1 |

(3) $(p \wedge r) \wedge (q \vee q) \vdash (p \to p) \vee \neg r$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $(p \wedge r) \wedge (q \vee q)$ | premissa |
| 2 | $p$ | hipótese |
| 3 | $p \to p$ | $\to_i$ 2–2 |
| 4 | $(p \to p) \vee \neg r$ | $\vee_{i_1}$ 3 |

(4) $p \to (r \vee s), \neg r, \neg s \vdash \neg p$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $p \to (r \vee s)$ | premissa |
| 2 | $\neg r$ | premissa |
| 3 | $\neg s$ | premissa |
| 4 | $\neg r \wedge \neg s$ | $\wedge_{\mathrm{i}}$ 2,3 |
| 5 | $\neg(r \vee s)$ | deMorgan 4 |
| 6 | $\neg p$ | MT 5,1 |

(5) $\neg q \to (q \wedge p) \vdash (q \vee p) \vee (p \vee p)$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $\neg q \to (q \wedge p)$ | premissa |
| 2 | $\neg q$ | hipótese |
| 3 | $q \wedge p$ | $\to_{\mathrm{e}}$ 2,1 |
| 4 | $q$ | $\wedge_{\mathrm{e}_1}$ 3 |
| 5 | $\bot$ | $\neg_{\mathrm{e}}$ 4,2 |
| 6 | $q$ | PBC 2–5 |
| 7 | $q \vee p$ | $\vee_{\mathrm{i}_1}$ 6 |
| 8 | $(q \vee p) \vee (p \vee p)$ | $\vee_{\mathrm{i}_1}$ 7 |

(6) $\vdash (p \to q) \to ((p \to \neg q) \to \neg p)$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $p \to q$ | hipótese |
| 2 | $p \to \neg q$ | hipótese |
| 3 | $p$ | hipótese |
| 4 | $q$ | $\to_{\mathrm{e}}$ 3,1 |
| 5 | $\neg q$ | $\to_{\mathrm{e}}$ 3,2 |
| 6 | $\bot$ | $\neg_{\mathrm{e}}$ 4,5 |
| 7 | $\neg p$ | $\neg_{\mathrm{i}}$3–6 |
| 8 | $(p \to \neg q) \to \neg p$ | $\to_{\mathrm{i}}$ 2–10 |
| 9 | $(p \to q) \to ((p \to \neg q) \to \neg p)$ | $\to_{\mathrm{i}}$ 1–11 |

(7) $\vdash ((p \to r) \to \neg r) \vee ((p \to p) \to (p \to p))$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $p \to p$ | hipótese |
| 2 | $(p \to p) \to (p \to p)$ | $\to_{\mathrm{i}}$ 1–1 |
| 3 | $((p \to r) \to \neg r) \vee ((p \to p) \to (p \to p))$ | $\vee_{\mathrm{e}}$2 2 |

(8) $p \vee (q \to r) \vdash (p \vee q) \to (p \vee r)$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $p \vee (q \to r)$ | premissa |
| 2 | $p \vee q$ | hipótese |
| 3 | $p$ | hipótese |
| 4 | $p \vee r$ | $\vee_{\mathrm{i}_1}$ 3 |
| 5 | $q$ | hipótese |
| 6 | $p$ | hipótese |
| 7 | $p \vee r$ | $\vee_{\mathrm{i}_1}$ 6 |
| 8 | $q \to r$ | hipótese |
| 9 | $r$ | $\to_{\mathrm{e}}$ 5,8 |
| 10 | $p \vee r$ | $\vee_{\mathrm{i}_2}$ 9 |
| 11 | $p \vee r$ | $\vee_{\mathrm{e}}$ 1,6–7,8–10 |
| 12 | $p \vee r$ | $\vee_{\mathrm{e}}$ 2,3–4,5-11 |
| 13 | $(p \vee q) \to (p \vee r)$ | $\to_{\mathrm{i}}$ 2–12 |

(9) $(q \to p) \vee \neg r \vdash (p \vee p) \to (r \to r)$

| | | |
|---|---|---|
| 1 | $(q \to p) \vee \neg r$ | premissa |
| 2 | $p \vee p$ | hipótese |
| 3 | $r$ | hipótese |
| 4 | $r \to r$ | $\to_{\mathrm{i}}$ 3–3 |
| 5 | $(p \vee p) \to (r \to r)$ | $\to_{\mathrm{i}}$ 2–4 |