

Soluções prova 1

Questão 0.1 (Formulação, 2.5pt)

Sejam x_1, x_2, x_4 o número de quartos simples, duplos, e suítes, respectivamente.

$$\begin{array}{ll} \text{maximiza} & 42000x_1 + 76000x_2 + 138000x_4 \\ \text{sujeito a} & x_1 \geq 20 \\ & x_2 \geq 35 \\ & x_4 \geq 10 \\ & 10x_1 + 18x_2 + 25x_4 \leq 950 \\ & x_1 + 2x_2 + 4x_4 \leq 100 \\ & x_1, x_2, x_4 \geq 0 \end{array}$$

Questão 0.2 (Formulação, 2.5pt)

Sejam $T = \{AL, CC, SR, IP\}$ os tipos de combustíveis e $D = \{A, B, P\}$ o tipo de uso do combustível. O tipo de uso determina se um combustível entra na mistura para combustível de avião tipo A , ou tipo B ou é vendido puramente (P). As variáveis de decisão são $x_{t,d}$ com $t \in T$ e $d \in D$. Além disso, vamos introduzir constantes o_t para a octanagem para cada tipo de combustível $t \in T$, e_t , $t \in T$ para as constantes de evaporação, p_t , $t \in T$ para a produção diária.

$$\begin{array}{llll} \text{maximiza} & \sum_{t \in T} 15.38x_{t,A} + 14.77x_{t,B} + 10.81x_{t,P} & & \\ \text{sujeito a} & x_d = \sum_{t \in T} x_{t,d} \quad \forall d \in D & \text{Var. aux.: barris por tipo de venda} & \\ & x_t = \sum_{d \in D} x_{t,d} \quad \forall t \in T & \text{Var. aux.: barris por tipo de produção} & \\ & x_t \leq p_t \quad \forall t \in T & \text{Restrição de produção} & \\ & \sum_{t \in T} o_t x_{t,A} \geq 100x_A & \text{Restr. octanagem, tipo A} & \\ & \sum_{t \in T} o_t x_{t,B} \geq 91x_B & \text{Restr. octanagem, tipo B} & \\ & \sum_{t \in T} e_t x_{t,A} \leq 7x_A & \text{Restr. evap., tipo A} & \\ & \sum_{t \in T} e_t x_{t,B} \leq 7x_B & \text{Restr. evap., tipo B} & \\ & x_{t,d} \geq 0 \quad \forall d \in D, \forall t \in T & & \end{array}$$

Questão 0.3 (Solução de sistemas lineares, 2.5pt)

(a) O sistema dual é

$$\begin{array}{ll} \text{minimiza} & -20y_1 + 100y_2 \\ \text{sujeito a} & -y_1 + 10y_2 \geq 2 \\ & -y_1 + 8y_2 \geq -3 \\ & -y_1 - 5y_2 \geq -4 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{array}$$

- (b) Como nem o primal nem o dual possui uma solução básica viável, vamos começar com a fase I no sistema primal.

O sistema auxiliar em forma normal é

$$\begin{array}{ll}\text{maximiza} & -x_0 \\ \text{sujeito a} & -x_1 - x_2 - x_3 - x_0 \leq -20 \\ & 10x_1 + 8x_2 - 5x_3 - x_0 \leq 100 \\ & x_0, x_1, x_2, x_3 \geq 0\end{array}$$

O dicionário inicial é

$$\begin{array}{rcllcl} z = & 0 & & -x_0 & & \\ x_4 = & -20 & +x_0 & +x_1 & +x_2 & +x_3 \\ x_5 = & 100 & +x_0 & -10x_1 & -8x_2 & +5x_3 \end{array}$$

O primeiro pivô é um pivô artificial x_0 - x_4 , para obter uma solução básica viável.

$$\begin{array}{rcllcl} z = & -20 & -x_4 & +x_1 & +x_2 & +x_3 \\ x_0 = & 20 & +x_4 & -x_1 & -x_2 & -x_3 \\ x_5 = & 120 & +x_4 & -11x_1 & -9x_2 & +4x_3 \end{array}$$

O próximo pivô (usando a dica) é x_1 - x_5 .

$$\begin{array}{rcllcl} z = & -100/11 & -10/11x_4 & -1/11x_5 & +2/11x_2 & +15/11x_3 \\ x_0 = & 100/11 & +10/11x_4 & +1/11x_5 & -2/11x_2 & -15/11x_3 \\ x_1 = & 120/11 & +1/11x_4 & -1/11x_5 & -9/11x_2 & +4/11x_3 \end{array}$$

O próximo (e último) pivô é x_3 - x_0

$$\begin{array}{rcllcl} z = & 0 & & & & -x_0 \\ x_3 = & 20/3 & +2/3x_4 & +1/15x_5 & -2/15x_2 & -11/15x_0 \\ x_1 = & 40/3 & +1/3x_4 & -1/15x_5 & -13/15x_2 & -4/15x_0 \end{array}$$

Passando para fase II, vamos reescrever a função objetivo original em termos das variáveis nulas x_4 , x_5 , e x_2 .

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 &= 2(40/3 + 1/3x_4 - 1/15x_5 - 13/15x_2) - 3x_2 - 4(20/3 + 2/3x_4 + 1/15x_5 - 2/15x_2) \\ &= 0 - 2x_4 - 6/15x_5 - 63/15x_2 \end{aligned}$$

Como todos coeficientes nessa função objetivo são negativos, o sistema sem x_0 e a função objetivo original já é ótimo.

- (c) A solução primal ótima é $x_1 = 40/3$, $x_3 = 20/3$ com valor 0.
 (d) A solução dual ótima é $y_1 = 2$, $y_2 = 6/15$, $y_4 = 63/15$ com o mesmo valor 0. (Com variáveis duais de folga y_3 , y_4 e y_5).

Questão 0.4 (Análise de sensibilidade, 2.5pt)

Temos

$$y_N^* = 1/4 \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \end{pmatrix} \quad B^{-1}N = 1/4 \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Com $\Delta c = (\Delta c_B^t \Delta c_N^t)^t$ com $\Delta c_B = (2 \ 3)^t$ e $\Delta c_N = (0 \ 0)^t$ (observe a ordem das variáveis), obtemos

$$\begin{aligned} \Delta y_N^* &= (B^{-1}N)^t \Delta c_B - \Delta c_N \\ &= (B^{-1}N)^t \Delta c_B \\ &= 1/4 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1/4 \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A condição para manter o sistema viável é

$$\begin{aligned} y_N^* + t\Delta y_N^* &\geq 0 \\ \iff 1/4 \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \end{pmatrix} + 1/4t \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} &\geq 0 \\ \iff \begin{pmatrix} 1 \\ 13 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} &\geq 0 \end{aligned}$$

que é equivalente com

$$\begin{aligned} t &\geq -1 \\ t &\geq -13/9 \end{aligned}$$

i.e. $t \in [-1, \infty]$.

Questão 0.5 (Verdadeiro ou falso, 2.5pt)

- (a) Falso. ($\max\{0 \mid Ax \leq b\}$ possui um número infinito de soluções caso $Ax \leq b$ permite mais que uma solução.)
- (b) Verdadeiro. (Com n restrições e m variáveis temos no máximo m chosen bases.)
- (c) Falso. (Mesmo exemplo que item (a)).
- (d) Falso. (Os dois sistemas podem ser inviáveis.)
- (e) Verdadeiro. (Sim, isso é o teorema fraco de dualidade.)